

# KOMPUTASI NUMERIK GERAK PROYEKTIL DUA DIMENSI MEMPERHITUNGKAN GAYA HAMBATAN UDARA DENGAN METODE RUNGE-KUTTA4 DAN DIVISUALISASIKAN DI GUI MATLAB

Tatik Juwariyah

Fakultas Teknik Universitas Pembangunan Nasional "Veteran" Jakarta  
Kampus Jalan RS. Fatmawati Pondok Labu Jakarta 12450  
Email: tatik\_j@yahoo.com

## Abstract

The simulation of two dimensional projectile motion problem with including resisting force as velocity function in MATLAB program has been done. The two dimensional projectile motion problem was formulated in second order differential equation which included resistance form as linear velocity function. The second order differential of motion then separated into two coupled first order differential equation and then numerically was solved by Runge\_Kutta4 method. The visualisation of computation values as a path of projectile motion and others physics quantities like dissipation energy were shown by MATLAB GUIDE.

**Key word :** projectile motion, resisting force, Runge-Kutta4, MATLAB GUIDE

## PENDAHULUAN

Pada bidang mekanika masalah gerak benda akibat adanya gaya-gaya luar yang bekerja pada benda selalu menarik untuk dikaji. Gerak benda pada kondisi riil di kehidupan sehari-hari selalu melibatkan adanya gaya-gaya luar dan pada kenyataannya tidaklah selalu mudah diselesaikan secara analitik (Lung, 2009). Pendekatan secara numerik dapat diterapkan untuk menyelesaikan masalah matematis yang sulit diselesaikan secara analitik ataupun tidak adanya solusi analitik (Suarga, 2007).

## Dasar Teori Gerak Projektil 2D

Banyak persoalan dalam sains dan teknik menyangkut kajian suatu sistem selama periode waktu tertentu. Kajian persoalan ini secara matematis dimodelkan dengan suatu persamaan diferensial dengan waktu sebagai variabel bebas (Sahid, 2005). Penyelesaian fenomena alam yang berbentuk persamaan diferensial ini dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu cara analitik dan numerik. Pada kondisi nyata, benda yang sedang melayang di udara tidaklah murni hanya terpengaruh gaya berat saja, namun pada keadaan nyata menunjukkan adanya hambatan udara yang mempengaruhi gerakan benda. Gaya hambatan

udara muncul sebagai gaya gesekan yang melawan arah gerak benda. Adanya gaya hambatan udara berpengaruh terhadap lintasan gerak sebagaimana ditunjukkan Gambar 1.

Gerak proyektil dengan memperhitungkan gaya hambatan dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial orde dua sebagai berikut (Fowles, 1986).

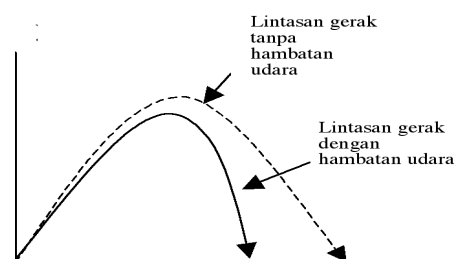
$$\vec{F} = -mg\hat{j} - \vec{f}(v) \quad (1)$$

dengan  $\vec{f}(v)$  adalah gaya hambat udara sebagai fungsi linier kecepatan gerak. Persamaan (1) dapat dipecah ke dalam komponen arah x dan y,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mathcal{W}_x \quad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \mathcal{W}_y \quad (3)$$

Dengan  $\mathcal{W} = c/m$ .



Gambar 1. Lintasan gerak projektil

Salah satu metode di bidang komputasi numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial masalah syarat awal adalah metode RungeKutta4. Metode ini menerapkan empat langkah perhitungan guna memperoleh penyelesaian pada keadaan selanjutnya. Dari keadaan awal  $y_i = y(t_i)$  dan persamaan diferensial untuk  $y$  adalah  $dy/dt = f(t_i, y_i)$  dengan metode Runge-Kutta4 selanjutnya dihitung nilai  $y$  selanjutnya melalui langkah-langkah :

$$\begin{aligned} S_1 &= f(t_i, y_i) \\ S_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} S_1\right) \\ S_3 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} S_2\right) \\ S_4 &= f(t_i + h, y_i + h S_3) \\ y_{i+1} &= y_i + h \frac{(S_1 + 2S_2 + 2S_3 + S_4)}{6} \end{aligned} \quad (4)$$

Dimana lebar langkah waktu  $h = t_{i+1} - t_i$ .

Dimana lebar langkah waktu.

## METODE PENELITIAN

Persamaan gerak proyektil pada arah sumbu x sebagaimana tertulis pada persamaan (2) dan arah sumbu y sebagaimana tertulis pada persamaan (3) yang berbentuk persamaan diferensial orde dua selanjutnya dipecah menjadi dua persamaan orde satu sebagai berikut. Komponen persamaan gerak arah sumbu x dipecah menjadi,

$$f_1(t, v) = \frac{dv_x}{dt} = -\gamma v_x \quad (5)$$

$$f_2(t, v) = \frac{dx}{dt} = v_x \quad (6)$$

Komponen persamaan gerak arah sumbu-y dipecah menjadi,

$$g_1(t, v) = \frac{dv_y}{dt} = -g - \gamma v_y$$

$$g_2(t, v) = \frac{dy}{dt} = v_y$$

Persamaan (5), (6), (7), dan (8) selanjutnya diselesaikan secara numerik dengan metode Runge Kutta4. Variabel waktu sebagai variabel bebas dinyatakan sebagai,  $t_{i+1} = t_i + h$  dengan  $h$  adalah lebar waktu yang dikehendaki. Masalah selanjutnya diselesaikan dengan informasi syarat awal waktu  $t_0 = 0$ , syarat awal kecepatan  $v_x(0) = v_0 \cos \theta$  dan  $v_y(0) = v_0 \sin \theta$ ; syarat awal posisi  $x_0 = 0$  dan  $y_0 = 0$ .

Secara detail setiap persamaan (5), (6), (7) dan (8) dapat dirumuskan sebagai berikut. Metode RungeKutta4 untuk persamaan (5) guna mendapatkan  $v_x$  keadaan berikutnya adalah :

$$\begin{aligned} S_{1vx} &= -\gamma v_{x(i)} \\ S_{2vx} &= -\gamma \left( v_{x(i)} + \frac{h}{2} S_{1vx} \right) \\ S_{3vx} &= -\gamma \left( v_{x(i)} + \frac{h}{2} S_{2vx} \right) \\ S_{4vx} &= -\gamma \left( v_{x(i)} + h S_{3vx} \right) \\ v_{x(i+1)} &= v_{x(i)} + h \frac{(S_{1vx} + 2S_{2vx} + 2S_{3vx} + S_{4vx})}{6} \end{aligned}$$

Metode RungeKutta4 untuk persamaan (6) guna mendapatkan  $x$  keadaan berikutnya adalah

$$\begin{aligned} S_{1x} &= v_{x(i)} \\ S_{2x} &= \left( v_{x(i)} + \frac{h}{2} S_{1x} \right) \\ S_{3x} &= \left( v_{x(i)} + \frac{h}{2} S_{2x} \right) \\ S_{4x} &= \left( v_{x(i)} + h S_{3x} \right) \\ x_{(i+1)} &= x_{(i)} + h \frac{(S_{1x} + 2S_{2x} + 2S_{3x} + S_{4x})}{6} \end{aligned}$$

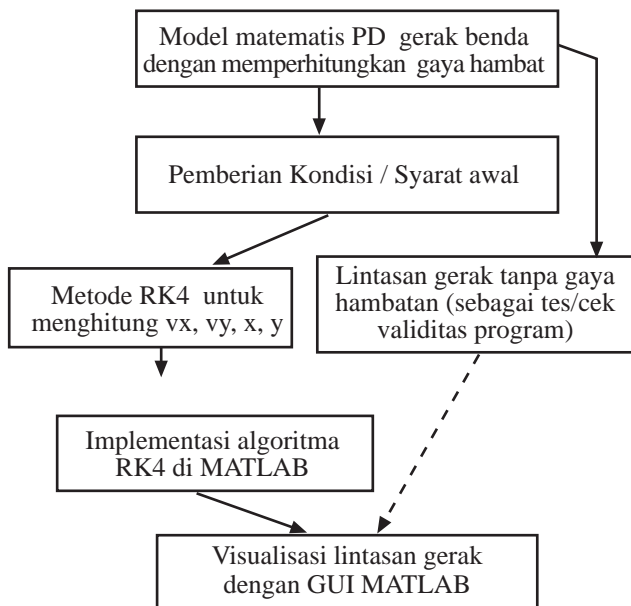
Metode RungeKutta4 untuk persamaan (7) guna mendapatkan  $v_y$  keadaan berikutnya adalah :

$$\begin{aligned} S_{1vy} &= -g - \gamma v_{y(i)} \\ S_{2vy} &= -g - \gamma \left( v_{y(i)} + \frac{h}{2} S_{1vy} \right) \\ S_{3vy} &= -g - \gamma \left( v_{y(i)} + \frac{h}{2} S_{2vy} \right) \\ S_{4vy} &= -\gamma \left( v_{y(i)} + h S_{3vy} \right) \\ v_{y(i+1)} &= v_{y(i)} + h \frac{(S_{1vy} + 2S_{2vy} + 2S_{3vy} + S_{4vy})}{6} \end{aligned}$$

Metode RungeKutta4 untuk persamaan (8) guna mendapatkan  $y$  keadaan berikutnya adalah

$$\begin{aligned} S_{1y} &= v_{y(i)} \\ S_{2y} &= \left( v_{y(i)} + \frac{h}{2} S_{1y} \right) \\ S_{3y} &= \left( v_{y(i)} + \frac{h}{2} S_{2y} \right) \\ S_{4y} &= \left( v_{y(i)} + h S_{3y} \right) \\ y_{(i+1)} &= y_{(i)} + h \frac{(S_{1y} + 2S_{2y} + 2S_{3y} + S_{4y})}{6} \end{aligned}$$

Adapun diagram alir penelitian ini dapat ditunjukkan pada Gambar 2 berikut.



Gambar 2. Diagram alir penelitian

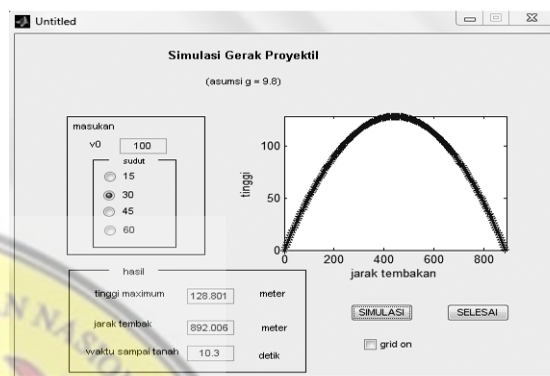
## HASIL DAN PEMBAHASAN

Dengan GUI MATLAB hasil perhitungan dapat divisualisasikan secara menarik dan fleksibel. Hal ini dilakukan dengan membuat suatu algoritma yang memberi kebebasan pengguna program untuk memberikan nilai kecepatan awal proyektil. Selain itu juga terdapat pilihan sudut tembakan yaitu dengan sudut 15°, 30°, 45° dan 60°. Selanjutnya dilakukan simulasi perhitungan gerak proyektil tanpa memperhitungkan gaya hambatan sebagai bukti dari validitas algoritma RungeKutta4. Tanpa memperhitungkan gaya hambatan udara lintasan gerak proyektil akan berbentuk kurva parabola simetris seperti Gambar 3. Hal ini menunjukkan energi mekanik memiliki nilai konstan seperti terlihat pada Gambar 4. Energi mekanik hanya berubah-ubah bentuk ke dalam energi potensial dan energi kinetik seperti Gambar 5. Nilai kecepatan  $v_y$  berkurang secara linier dan menjadi nol saat proyektil berada di ketinggian maksimum (Gambar 6). Nilai  $v_y$  menjadi negatif ketika proyektil bergerak turun ke bawah dan saat mencapai tanah nilai mutlak  $v_y$  sama dengan nilai awal saat proyektil bergerak naik. Nilai kecepatan  $v_x$  selalu konstan karena tidak ada pengaruh gaya gravitasi sehingga energi kinetik arah  $x$  konstan (Gambar 7).

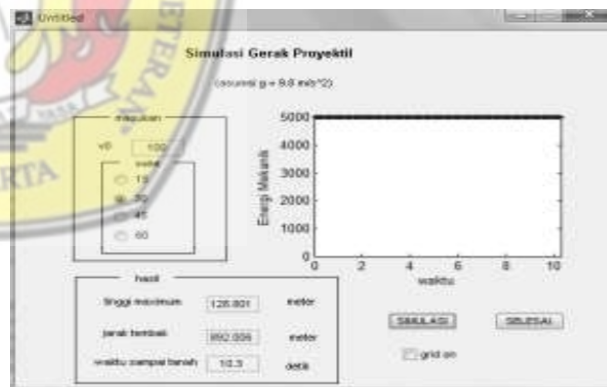
Pada gerak tanpa gaya hambatan, pada sampel simulasi sudut tembakan 30° bila dibandingkan dengan nilai analitik terdapat kesalahan (error) seperti ditunjukkan pada tabel 1 berikut:

Tabel 1. Nilai kesalahan numerik simulasi gerak proyektil tanpa gaya hambatan

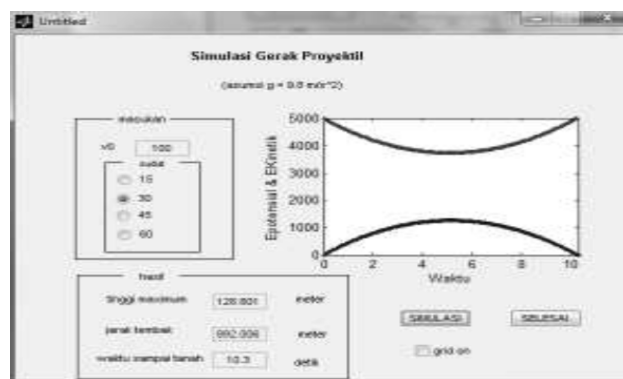
Variabel	Numerik	Analitik	error
$t_{udara}$	10.3	10.2041	0.0959
$v_x(akhir)$	86.603	86.6025	0.0005
$v_y(akhir)$	-50.450	-50.0000	0.45
Jangkauan	892.006	883.699	8.307
$y(h_{max})$	128.802	127.551	1.251
$E_p(akhir)$	2.009	0.000	2.009
$E_k(akhir)$	5022.601	5000	22.601
$E_m(akhir)$	5024.610	5000	24.610



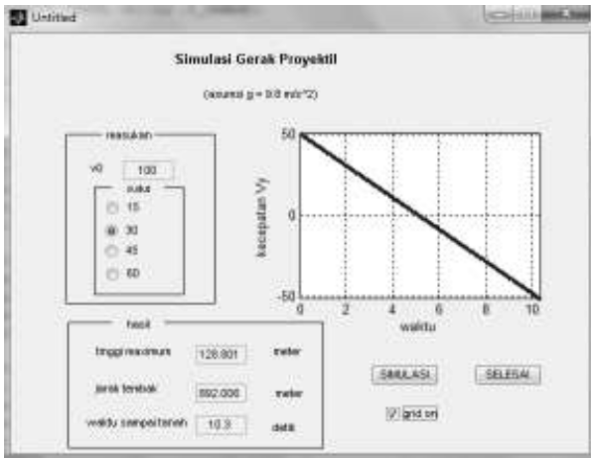
Gambar 3. Lintasan gerak proyektil(tanpa gaya hambat)



Gambar 4. Energi mekanik (tanpa gaya hambatan)



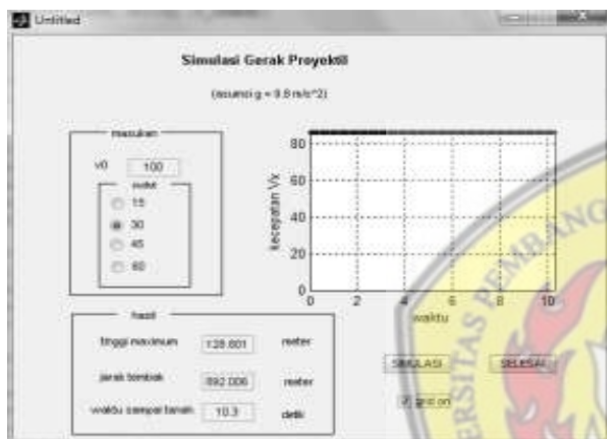
Gambar 5. Energi Potensial & Energi Kinetik (tanpa gaya hambatan)



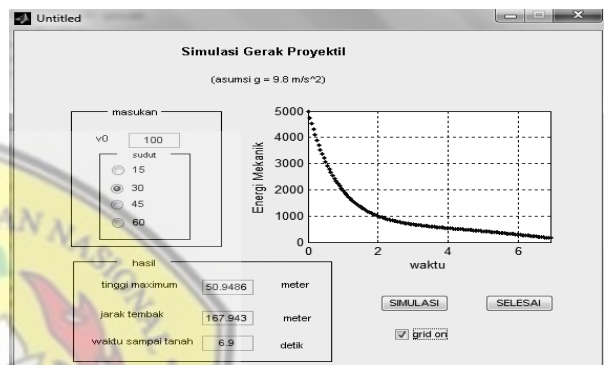
Gambar 6. Kecepatan  $v_y$  gerak proyektil (tanpa gaya hambatan)

Tabel 2. Nilai kesalahan numerik simulasi gerak proyektil dengan gaya hambatan

Variabel	Numerik	Analistik	error
$t_{udara}$	6.9	6.874	0.0264
$v_x(akhir)$	2.631	2.6152	0.0158
$v_y(akhir)$	-17.485	-17.4983	0.0133
Jangkauan	167.943	167.9747	0.0317
$y(h_{max})$	50.9486	50.3244	0.6242
$E_p$	2.640	0.0000	2.640
$E_k$	156.330	156.5149	0.1849
$E_{m\_akhir}$	176.8952	156.5149	20.3803



Gambar 7. Kecepatan  $v_x$  proyektil (tanpa gaya hambatan)



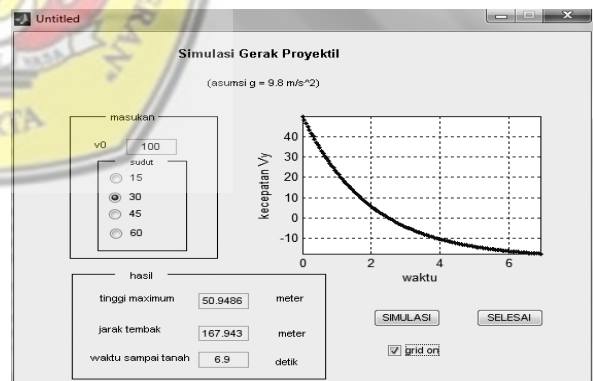
Gambar 8. Lintasan Gerak  $y$  versus  $x$

Gambar 9. Energi mekanik

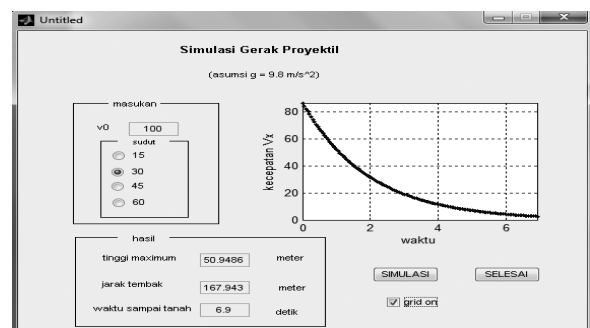
### Simulasi memperhitungkan gaya hambatan

Dengan memperhitungkan adanya gaya hambatan sebagai fungsi kecepatan linier, kurva lintasan gerak proyektil tidak lagi simetris seperti terlihat pada Gambar 8. Adanya faktor redaman yang menghambat gerak mengakibatkan energi mekanik tidak konstan dan berkurang hingga sebesar  $E_{min} = 0.5mv^2 = 156 \text{ Joule}$  (Gambar 9). Energi mekanik berasal dari jumlahan energi potensial (bertambah dan berkurang tergantung ketinggian proyektil) dan energi kinetik (berkurang drastis) setiap waktu. Dilihat dari kurva kecepatan terhadap waktu masing-masing nilai  $v_x$  dan  $v_y$  juga semakin berkurang sebagaimana tampak pada Gambar 11 dan Gambar 12.

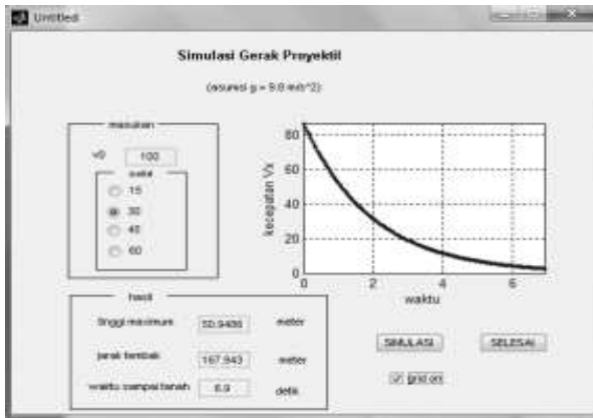
Pada gerak proyektil dengan memperhitungkan gaya hambatan, pada sampel simulasi sudut tembakan 300 terdapat ralat (error) terhadap analitik seperti ditunjukkan pada Tabel 2 berikut



Gambar 10. Energi Potensial & Energi Kinetik



Gambar 11. Kurva Kecepatan  $v_y$  (t)



Gambar 12. Kurva Kecepatan  $v_x(t)$

projectile motion with the quadratic resistance law using the homotopy analysis method. *J. Phys. A: Math. Theor.* 40 8403–8416 doi:10.1088/1751-8113/40/29/015

Yang W.Y, dkk. 2005. *Applied Numerical Methods using MATLAB*. John Wiley & Sons. New Jersey.

## KESIMPULAN

Dari hasil simulasi numerik ini dapat disimpulkan bahwa metode Runge Kutta4 dapat diterapkan untuk menyelesaikan masalah fisis yang dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial seperti gerak proyektil 2D dengan memperhitungkan gaya hambatan fungsi kecepatan linier. Adanya gaya hambatan akan mempengaruhi energi mekanik menjadi tidak konstan dan berkurang secara drastis. Metode numerik RK4 dapat dipakai untuk mendapatkan solusi pendekatan selain metode analitik.

## DAFTAR PUSTAKA

- Fowles, G.R. 1986. *Analytical Mechanics*. CBS College Publishing. New York.
- Lung, M.C., dkk. 2009. A study of shuttlecock's trajectory in badminton. *Journal of Sports Science and Medicine* 8, 657-662
- Sahid. 2005. *Pengantar Komputasi Numerik dengan MATLAB*. Penerbit Andi. Yogyakarta.
- Suarga. 2007. *Fisika Komputasi, Solusi Problema Fisika dengan MATLAB*. Penerbit Andi. Yogyakarta.
- Sugiharta, A. 2006. *Pemrograman GUI dengan MATLAB*. Penerbit Andi. Yogyakarta.
- Suparso, E. 2009. *Simulasi Gerak Jatuh Bebas dengan Visual Basic*. Tesis FMIPA UGM. Yogyakarta.
- Yabushita, K, dkk. 2007. An analytic solution of